振り子のしくみ

単元のねらいに「条件を制御して調べる能力を育てる」とありますが、数値の違いを徒に「誤差」でまとめてしまう（ことを推奨する）ケースもみられるようです。「質量、振れ幅、長さ」の3要素がどのように周期に関わっているのか、近似はどこまで適用できるのか、分かる範囲で正しく捉え直し、子どもたちに適切な指導を考えましょう。

◇振り子の3要素について（詳細は「原理」参照）

振り子の実験パラメーターは「質量、振れ幅、糸の長さ」の3つです。理想的な振り子の場合、その周期はおもりの質量には厳密に依存せず、糸の長さに対しては、その√に比例します。振れ幅が小さいうちは、周期は振れ幅によらず一定と近似できますが、振れ幅が大きくなると周期も長くなります。右の表に、振れ幅（θ_0）を大きくした際の実際の周期と、一定と近似したものとの違い（比）を示します。例えば、10° と 30° とでは、その差は1.55%となります。50 cmの振り子の場合、1周期は1.4秒で、一般的な実験で計測する10周期分では14秒になります。その1.55%なので、二つの振れ幅の10周期分の差は約0.2秒となり、測定誤差と同程度とみなすこともできます。しかし、10° と 60° とを比べると、その差は7.13%で、10周期では1秒程度の差となり、小学生でもきちんと計測すれば、十分違いを評価することができます。

θ_0の大きさと周期のズレ

θ_0	実際／近似
5°	1.0005
10°	1.0019
20°	1.0077
30°	1.0174
45°	1.0400
60°	1.0732
90°	1.1803

http://mathtrain.jp/huriko

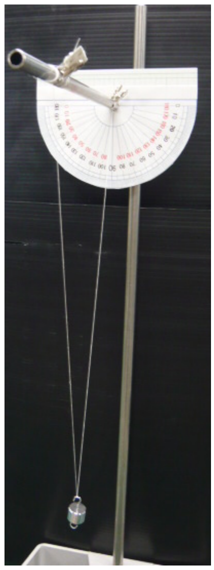
周期が振れ幅に依存しないのは、振れ幅が十分に小さい場合の近似に過ぎません。そして、「十分に小さい」かどうかは、測定の精度に依存します。ただ、0.01秒精度で計測できるからといって「30° までね」という制約で小学生が振れ幅の違いを実感できるかどうかは疑問です。手動計時ならいざ知らず、0.01秒精度のストップウォッチが百円そこそこで買える現在、ねらいや方法を見直す必要があるのかもしれません。

◇用意するもの

軽い糸、支持棒（外径10 mmの金属製丸棒／管）、目玉クリップ2、実験用スタンド及びムッフ、角度表示板※、おもり（10 g、20 g）、ストップウォッチ（0.01秒）

※分度器の拡大コピーを段ボールなどに貼付けて作成。

◇振り子の作成



実験用スタンドのムッフに、支持棒を机と水平に取り付けます。
角度表示板の中心部に穴をあけ、支持棒に差し込み固定します。
糸の一端を支持棒に巻き付け、目玉クリップで固定します。このとき、支持棒の真下から糸が垂れるようにします。
V 字になるように糸を垂らし、先端におもりを下げて長さを調整し、もう一方の端も目玉クリップで同様に留めます。

◇実験

1．見た目による振れ方の違いの比較（演示）

次の各条件において振り子を二つ並べ、振れ方の違いを見せましょう。

3 要素全て同じ／振れ幅だけ異なる／重さだけ異なる／長さだけ異なる

2．条件制御の実験

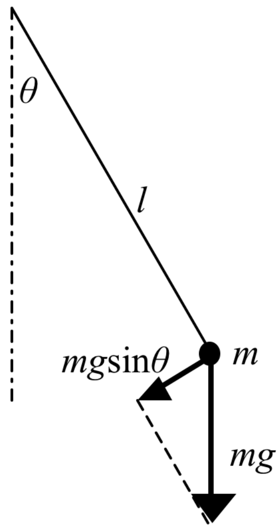
以下の各条件において 10 周期分を 3 回計測し、平均を取りましょう。

① 長さ 50 cm、角度 15°で、重さ 10 g と 20 g。
② 長さ 50 cm、重さ 10 g で、角度 30°と 45°。
③ 重さ 10 g、角度 15°で、長さ 50 cm と 1 m。

◇考え方

並べて比べるとその違いがよく分かります。観察により「変化する／しない」を明確にし、実際に計測すると「誤差」の認識も深まります。ただし、同条件の振り子でも同じように振れない場合があります。混乱を生じないように、1 については予備実験を十分に行い、演示できちんと示すようにしましょう。

◇原理（高校物理の内容含む）



1．運動方程式と、周期の質量依存性

物体の運動の様子を表現する手段として「運動方程式」があります。物体にかかる、各力の要素の釣り合いを表したもので、そこから物体がどのように運動するのか（＝どのような加速度を持つのか）求めます。

振り子の場合は、おもり（質量 m）の運動を考えます。運動のもととなる力は重力（mg：g は重力加速度）です。おもりは糸に支えられているので真下に落下せず、支点を中心とし、糸の長さ（＝l）を半径とした円弧上を動きます。

ある時点でのおもりの運動は、図に示すように円弧の接線方向に向かいます。糸が鉛直方向となす角をθ、加速度をaとすると、重力の接線方向の成分の大きさは$mg\sin\theta$で、右向きを正の方向に取ると、この運動方程式は、

$$ma = -mg\sin\theta \quad \rightarrow \quad a = -g\sin\theta \quad \cdots (1)$$

となります。右の式を見るとmは入っていないので、mは運動（加速度a）に影響を与えないことが分かります。つまり、理想的な振り子では「質量を変えても周期は変わらない」のです。

なお、質量に運動が依存しないことについては、自由落下と関連づけられると、概念理解が深まるでしょう。

２．周期の糸の長さ・振れ幅依存性の近似解

おもりの位置の変化量（移動距離）xとその間の角度の変化量θとの間には、

$$x = l \times \theta \quad \cdots (2)$$

という関係が成り立ちます。時間（t）当たりの位置の変化量（x の t 微分）が速度、時間当りの速度の変化量が加速度なので、xを時間で2回微分すると加速度となります。これと（1)、(2）式を組み合わせると、

$$a = \mathrm{d}^2x／\mathrm{d}t^2 = l \times \mathrm{d}^2\theta／\mathrm{d}t^2 = -g\sin\theta \quad \cdots (3)$$

となり、ここまでが理想的な振り子の厳密な式です。

この式を高校物理で解くために、「θが小さい」場合に成り立つ近似、$\sin\theta \fallingdotseq \theta$を導入します。そして後は機械的に式を解くと、周期をT、振り始めの角度をθ_0として、

$$l \times \mathrm{d}^2\theta／\mathrm{d}t^2 = -g \times \theta$$

$$\rightarrow \quad \mathrm{d}^2\theta／\mathrm{d}t^2 = -(g／l) \times \theta$$

$$\rightarrow \quad \theta = \theta_0 \sin(2\pi／T)t \quad \cdots \quad T = 2\pi\sqrt{(l／g)}$$

となり、Tはlのみに依存し、θ_0には依存しなくなります。

３．周期の振れ幅依存性の厳密解

式（3）を厳密に解くことは、ここでは少々荷が重いので、興味のある方は「振り子　厳密解」等で検索し、自身の求めに応じた解説を探してみてください。なお、厳密解においても、lへの依存性はその$\sqrt{\ }$となります。